SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2001-2002

Daniele Morbidelli

DOMINI DI JOHN E UNIFORMI IN SPAZI DI CARNOT-CARATHEODORY

26 febbraio 2002

Tecnoprint - Bologna 2003

Riassunto

Si discute la nozione di dominio di John, uniforme e non tangenzialmente accessibile in uno spazio di Carnot–Carathéodory.

Abstract

We study the notion of John, uniform, and non tangentially accessible domain in a Carnot–Caratéodory space.

In questo seminario esponiamo dei risultati ottenuti in collaborazione con Roberto Monti (Berna).

Partiamo da un paio di problemi classici della teoria delle funzioni di Sobolev.

1. Se $D \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato, ci si domanda per quali p, q vale la seguente disuguaglianza di $(q,p)-$Poincaré

$$\Big(\int_D |u(x) - u_D|^q\Big)^{1/q} dx \leq C\Big(\int_D |\nabla u(x)|^p dx\Big)^{1/p}, \quad u \in C^1(D). \qquad (1)$$

Qui $u_D = \frac{1}{|D|}\int_D u$ è la media di u rispetto alla misura di Lebesgue. Nel caso di domini con la proprietà del cono interno, è noto che, fissato un $p \in [1,n)$ la (1) vale per ogni q positivo che soddisfi $q \leq \frac{pn}{n-p}$. [1] Questo è essenzialmente contenuto nei lavori di Sobolev e della scuola russa. Il problema di determinare, assegnato un dominio D, la validità della (1) è molto studiato in letteratura. In generale, se D ha bordo che è localmente grafico di una funzione continua si può asserire soltanto che (1) vale solo per $p = q$ (cosa che peraltro è sufficiente (con $p = q = 2$) ad assicurare una stima da sotto a priori del primo autovalore non banale del laplaciano con dato di Neumann).

Le risposte più recenti (e più pertinenti al contesto di questa esposizione) al problema sono contenute nei lavori di Besov [Be], Martio [M] e Bojarski [B] dove vengono introdotte delle condizioni di *cono twisted* o condizioni di John. In questi lavori è provato che se D è un dominio di John, allora vale (1) per ogni $q \leq pn/(n-p)$. Per lo studio del caso "cuspidale" in cui (1) vale con esponente $q < p^*$, menzioniamo anche i lavori [SS], [HK2], [KOT] e la monografia [MP].

Definizione 1 *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è di John se esiste un punto $\bar{x} \in \Omega$ tale che per ogni $x \in \Omega$ si può trovare una curva rettificabile e continua tale che $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = \bar{x}$ e*

$$\mathrm{dist}(\gamma(t), \partial\Omega) \geq \lambda \,\mathrm{lunghezza}(\gamma|_{[0,t]}), \quad \forall\, t \in [0,1].$$

2. Un altro problema classico della teoria della funzioni di Sobolev è quello dell' estensione, che si formula nei termini seguenti. Indichiamo con $W^{1,p}(D)$, $1 < p < \infty$, lo spazio di Sobolev delle funzioni il cui gradiente distribuzionale in D è in $L^p(D)$. Per quali domini esiste un "operatore di estensione"

$$\mathcal{E} : W^{1,p}(D) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

continuo e tale che $\mathcal{E}u = u$ quasi dappertutto su D? Un risultato di Calderón asserisce che questo è vero per ogni dominio con frontiera lipshitziana (si veda la classica monografia [S]). Più recentemente Jones [Jon] ha provato che questo è vero per una classe di aperti molto più ampia. Quella dei *domini uniformi*.

[1] Si vede con facili esempi che non può valere per q più grande. Inoltre per la disuguaglianza di Hölder, se vale $(q,p)-$Poincaré allora vale $(r,p)-$Poincaré per ogni $r < q$.

Definizione 2 *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è uniforme se per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$ si può trovare una curva rettificabile e continua tale che $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ e*

$$\mathrm{dist}(\gamma(t), \partial\Omega) \geq \lambda \min\{\mathrm{lunghezza}(\gamma|_{[0,t]}), \mathrm{lunghezza}(\gamma|_{[t,1]})\}, \quad \forall t \in [0,1].$$

La nozione di dominio uniforme è molto simile a quella di dominio *non tangenzialmente accessibile* (dominio NTA) utilizzata da Jerison e Kenig [JK] per generalizzare varie proprietà classiche riguardanti il comportamento al bordo delle funzioni armoniche non negative. La nozione di dominio NTA è decisamente più tecnica e qui non la descriveremo in dettaglio.

Osserviamo esplicitamente che le definizioni di dominio di John e di dominio uniforme hanno senso per aperti in un qualsiasi spazio metrico (le nozioni coinvolte – distanza e lunghezza di una curva – sono puramente metriche).

Famiglie di campi vettoriali. Risultati generali

Qui consideriamo una famiglia di campi vettoriali $X_1, X_2, \ldots X_m$, $X_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Nello studio delle proprietà dell'operatore differenziale del secondo ordine $\sum_{j=1}^m X_j^2$ è naturale utilizzare la (semi)norma Sobolev

$$\|u\|_{W_X^{1,p}(\Omega)} = \sum_{j=1}^m \Big(\int_\Omega |X_j u|^p dx \Big)^{1/p}$$

e la *distanza di controllo* $d(x,y)$ su $\mathbb{R}^n$. La distanza di controllo si definisce come segue (si veda [FL1] e [FP]): diciamo che una curva $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ è subunitaria se soddisfa $\dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^m c_j(t) X_j(\gamma(t))$, con $\sum_{j=1}^m c_j(t)^2 \leq 1$, per quasi ogni $t \in [0,T]$. La distanza di controllo è definita come segue:

$$\begin{aligned} d(x,y) = \inf\{T > 0 : &\text{ esiste una curva subunitaria } \gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n, \\ &\text{tale che} \quad \gamma(0) = x, \quad \gamma(T) = y\}. \end{aligned}$$

Assumiamo che $X_1, \ldots, X_m$ generino una distanza di controllo topologicamente equivalente a quella euclidea e che esistano costanti C e Q positive per cui

$$\mathrm{mis}(B(x_0, 2r)) \leq 2^Q \mathrm{mis}(B(x_0, r)) \qquad \text{(H1)}$$

$$\int_{B(x_0,r)} |u(x) - u_B| dx \leq Cr \int_{B(x_0,Cr)} \sum_{j=1}^m |X_j u(x)| dx \qquad \text{(H2)}$$

per ogni palla della distanza di controllo $B(x_0, r)$ centrata in un compatto fissato e di raggio $\leq r_0$.

Se tutto ciò è verificato, allora la disuguaglianza (1) si generalizza come segue

$$\Big(\int_\Omega |u - u_\Omega|^{p^*} dx \Big)^{1/p^*} \leq C \Big(\int_\Omega |Xu|^p dx \Big)^{1/p}, \qquad p^* = \frac{pQ}{Q-p} \qquad (2)$$

a un dominio di John Ω ([FLW], [GN1], Hajłasz [HK]). Inoltre, se Ω è un dominio uniforme rispetto alla distanza di controllo, allora esiste un operatore continuo di estensione da $W^{1,p}_X(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : X_j u \in L^p(\Omega),\ j = 1, \ldots, n$ a $W^{1,p}_X(\Omega_0)$, con $\overline{\Omega} \subset \Omega_0$ ([VG] e [GN2]).

Per finire, in [CG] le proprietà globali delle funzioni "armoniche" (cioè quelle che soddisfano $\sum_{j=1}^m X_j^2 u = 0$) non negative in Ω sono state studiate in [CG] e, più di recente, in [FF2] e [FF1].

Esempi concreti

I risultati assiomatici appena citati si applicano alle seguenti situazioni:

- La palla rispetto alla distanza di controllo è di John.
- La palla nel gruppo di Heisenberg è un dominio uniforme ma non è NTA (si veda [CG] e [VG]). Questo risultato usa la conoscenza esatta della forma della palla.
- I domini di classe $C^{1,1}$ nel gruppo di Heisenberg che abbiano simmetria cilindrica vicino a ogni punto caratteristico sono NTA (si veda [CG].
- Dal punto di vista della teoria del potenziale, è noto che esistono domini di classe C^∞ in gruppi omogenei che hanno punti non regolari per il problema di Dirichlet [HH]. D'altra parte i domini $C^{1,1}$ sopra detti sono regolari per il problema di Dirichlet (grazie al criterio di Wiener provato in [NS]).
- Proprietà di doubling della misura armonica sono state studiate rispetto a certe famiglie di campi di Hörmander e nello spazio di Grushin (si veda [FF1] e [FF2]).

Il lavoro di ricerca che presentiamo è dedicato all'arricchimento di queste classi di esempi.

Il gruppo di Heisenberg.

Modelli interessanti di campi vettoriali sono dati dai campi invarianti a sinistra sui gruppi nilpotenti. [2] Consideriamo i due campi in $\mathbb{R}^3$

$$X_1 = \partial_1 - \frac{1}{2} x_2 \partial_3 \quad \text{e} \quad X_2 = \partial_2 + \frac{1}{2} x_1 \partial_3.$$

Nel lavoro [CG] si prova che se un dominio ha simmetria radiale attorno a ogni punto caratteristico, allora è NTA. L'ipotesi di simmetria radiale significa che se il dominio si scrive localmente nella forma $x_3 > \varphi(x_1, x_2)$, con $\varphi(0,0) = 0$ e $\nabla\varphi(0,0) = 0$, allora la funzione deve essere necessariamente del tipo $\varphi = \varphi(x_1^2 + x_2^2)$. In [MM2] si prova che questa ipotesi si può rimuovere e che

[2] Si veda [Bo] per uno studio sistematico di questa nozione.

Teorema 1 *I domini di classe $C^{1,1}$ nel gruppo di Heisenberg sono uniformi (in effetti anche NTA).*

Il risultato vale in generale per campi invarianti a sinistra su gruppi omogenei *di passo 2.* [3]

Gruppi omogenei di passo più alto.

Qui descriviamo un esempio di famiglia di campi vettoriali in $\mathbb{R}^4$ in cui il problema di detereminare domini regolari in qualche senso è ancora aperto. Osserviamo che nella letteratura presente non esistono esempi espliciti di domini uniformi o non tangenzialmente accessibili e nemmeno di John in un setting diverso da quello dei gruppi di passo 2. Questa è stata la motivazione dei lavori [MM2] e [MM3].

Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i campi

$$X_1 = \partial_1 - \frac{1}{2}x_2\partial_3 + q_1(x)\partial_4, \qquad X_2 = \partial_2 + \frac{1}{2}x_1\partial_3 + q_2(x)\partial_4,$$

Si può verificare che con una opportuna scelta delle funzioni $q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3)$ e

[3]Un gruppo omogeneo di passo 2 è la cosa seguente: scriviamo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q$. Scriviamo $x = (x', x'')$. Supponiamo di avere delle matrici $B^{m+1}, \dots, B^m$ costanti, quadrate $m \times m$, reali e antisimmetriche. Si verifica che l'operazione binaria su $\mathbb{R}^n$

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{m}\{x_j + y_j\}e_j + \sum_{j=m+1}^{n}\left\{x_j + y_j + \frac{1}{2}\langle B^j x', y'\rangle\right\}e_j$$

definisce una struttura di gruppo di Lie e che, se $j \leq m$, i campi

$$X_j = \partial_j + \frac{1}{2}\sum_{i>m}\sum_{r=1}^{m} B^i_{r,j}x_r\partial_i$$

sono invarianti a sinistra rispetto alla legge assegnata. Scriviamo ora $\mathcal{A} = \{(r,s) : 1 \leq r < s \leq m\}$ assumiamo anche che la trasformazione lineare

$$\mathbb{R}^{m(m-1)/2} \ni (\lambda_{r,s})_{(r,s)\in\mathcal{A}} \mapsto \sum_{j=m+1}^{n} B^j_{r,s}\lambda_{r,s}e_j \in \mathbb{R}^q$$

sia suriettiva, allora i campi X_j, $j = 1, \dots, m$ soddisfano l'ipotesi di Hörmander e il gruppo $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ si chiama usualmente gruppo omogeneo di passo 2. Se in più (eventualmente aggiustando la scelta della base e_j) si verifica che: (i) $(B^i)^2 = -I_m$ per ogni $j = m+1, \dots, n$ ($\Rightarrow m$ pari); (ii) $B^iB^j = -B^jB^i$ per ogni $i \neq j$, il gruppo si chiama *di tipo Heisenberg.* Scritta $(x', x'') \mapsto (Ux', x'') \equiv T_U(x', x'')$, $U \in O(m)$, il "laplaciano" commuta con T_U e ha la forma

$$\sum_{j=1}^{m} X_j^2 = \Delta' + \sum_{i=m+1}^{n} \langle x', B^i\nabla'\rangle\partial_i + \frac{1}{4}|x'|^2\Delta''.$$

$q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3)$ [4] i campi sono i generatori di un'algebra di Lie di dimensione 4 e di passo 3.[5] I campi X_1 e X_2 sono invarianti a sinistra sul gruppo di Lie $(\mathbb{R}^4, \circ)$ dove $\circ$ è un'operazione del tipo

$$x \cdot y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + Q_3(x_1, x_2, y_1, y_2), \\ x_4 + y_4 + Q_4(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3))$$

e le funzioni $Q_j(x, y)$ hanno una forma complicata ma esplicita (si veda [MM2]).

Nel contesto ora inquadrato abbiamo i risultati seguenti:

Teorema 2 *Se un dominio $\Omega = \{\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) > 0\}$ è sufficientemente regolare* [6] *e soddisfa*

$$\begin{aligned} &|X_1^2\Phi(x)| + |X_2^2\Phi(x)| + |(X_1X_2 + X_2X_1)\Phi(x)| \\ &\lesssim (|X_1\Phi(x)|^{1/2} + |X_2\Phi(x)|^{1/2} + |X_3\Phi(x)|). \end{aligned} \tag{4}$$

allora è un dominio di John rispetto alla distanza di controllo.

Si prova che, che se valgono le ipotesi del teorema appena enunciato, allora sono soddisfatte le condizioni del criterio di Wiener (si veda [NS]). Quindi Ω è anche un insieme regolare per la Teoria del Potenziale.

Osserviamo che se Ω si scrive nella forma $x_4 > f(x_1, x_2, x_3)$, $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$, allora la richiesta (4) implica che sia

$$|\varphi(x_1, x_2, x_3)| \lesssim (|x_1| + |x_2| + |x_3|^{1/2})^3.$$

E' ovvio che questa richiesta non è assicurata dalla regolarità euclidea.

In [MM2] si prova con un esempio che la classe dei domini per cui vale (4) è non vuota.

La condizione sembra precisa, anche in vista della seguente condizione necessaria:

Teorema 3 *Se Ω vicino all'origine ha la forma $x_4 > f(x_1, x_2, x_3)$ con $f(0) = 0$ e*

$$|f(x_1, x_2, x_3)| \lesssim (|x_1| + |x_2| + |x_3|^{1/2})^\gamma$$

per qualche $\gamma > 3$ (maggiore stretto), allora la disuguaglianza di (p^*, p)−Poincaré è falsa in Ω (in particolare Ω non è di John).

---

[4] Per esempio si può scegliere

$$\begin{aligned} q_1(x_1, x_2, x_3) &= -\left\{\frac{1}{12}(x_1x_2 + \alpha x_2^2) + \frac{1}{2}x_3\right\} \\ q_2(x_1, x_2, x_3) &= \left\{\frac{1}{12}(x_1^2 + \alpha x_1x_2) - \frac{\alpha}{2}x_3\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

[5] Le relazioni di commutazione sono precisamente $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_2, X_3] = \alpha X_4$, mentre tutti gli altri commutatori si annullano.

[6] Più precisamente, se, qualora lo si scriva localmente attorno all'origine come grafico di tipo $x_4 > f(x_1, x_2, x_3)$, $\nabla f(0,0,0) = 0$, allora la funzione f, abbia attorno all' origine nel gruppo di Heisenberg derivate seconde lungo i campi X_1 e X_2 lipschitziane (classe $\Gamma^{2,1}$ di Folland)

Questo teorema prova due fatti sorprendenti:

(i) se un dominio Ω localmente coincide attorno all'origine con il semispazio $x_4 > 0$, allora la disuguaglianza (p^*, p)−Poincaré (2) è falsa;

(ii) lo stesso avviene per la palla omogenea $(x_1^2+x_2^2)^6+x_3^6+x_4^4 < 1$. Questo risponde negativamente a una congettura enunciata in [CG].

Il caso di campi diagonali

Il lavoro di questa parte si riferisce a famiglie di campi del tipo $X_1 = \partial_1$ e $X_2 = \lambda_2(x_1)\partial_2, \dots, X_n = \lambda_n(x_1,\dots,x_{n-1})\partial_n$. Lo studio della distanza di controllo associata a questi campi è contenuto in vari lavori di scuola bolognese: si veda [FL1], [FL2], [FL3] e [F]. Nei lavori citati si conduce uno studio approfondito delle proprietà locali delle soluzioni di equazioni ellittiche degeneri associate a campi di tipo diagonale. Un primo risultato di tipo globale è contenuto in [FF2], dove si studia la proprietà doubling della misura armonica. In [MM3] proviamo i seguenti risultati.

Teorema 4 *Siano dati i campi in* $\mathbb{R}^2$ $X_1 = \partial_1$ *e* $X_2 = |x_1|^\alpha\partial_2$, $\alpha \geq 1$ *e un un dominio* Ω *di classe* C^1. *Assumiamo che in ogni punto* $(0,\bar{x}_2)$ *in cui il bordo di* Ω *tocca l'asse* x_2 *con tangente orizzontale, scritto localmente nella forma* $x_2 > f(x_1)$, *con* $f(0) = \bar{x}_2$ *e* $f'(0) = 0$ *valga la stima*

$$|f'(x_1)| \lesssim |x_1|^\alpha \tag{5}$$

attorno a $x_1 = 0$. *Allora* Ω *è uniforme (in effetti NTA).*

Osserviamo che la stima (5) è stata usata anche in [MM1] per provare: (i) la continuità dell'operatore di traccia su un opportuno spazio di Besov; (ii) il fatto che la "misura perimetro" sul bordo di Ω $d\mu(x) := \left(\nu_1(x)^2 + |x_1|^{2\alpha}\nu_2(x)^2\right)^{1/2} ds(x)$ [7] soddisfa la stima

$$\mu(B(x,r)\cap\partial\Omega) \simeq \frac{|B(x,r)|}{r}, \quad x\in\partial\Omega, 0<r<r_0.$$

Il teorema vale anche per campi in $\mathbb{R}^n$, con campi $X_1 = \partial_1, \dots, X_{n-1} = \partial_{n-1}$ e $X_n = |(x_1,\dots,x_{n-1})|^\alpha\partial_n$. Una teoria per domini "di tipo cuspidale" per questi campi è stata sviluppata in [FF2].

Nel lavoro [MM3] abbiamo iniziato a studiare anche casi in cui le variabili degeneri sono più di una. In questo caso sembra necessario richiedere delle condizioni di schiacciamento che coinvolgano anche le derivate seconde. In [MM3] si prova quanto segue:

Teorema 5 *Consideriamo i campi* $X_1 = \partial_1$, $X_2 = |x_1|^\alpha\partial_2$ *e* $X_3 = |x_1|^\beta|x_2|^\gamma\partial_3$. *Sia* $\Omega = \{x_3 > f(x_1,x_2)\}$ *dove la funzione* f *soddisfa la stima*

$$\sum_{i,j=1}^{2} |X_iX_jf(x_1,x_2)| \lesssim \left\{\sum_{j=1}^{2}|X_jf(x_1,x_2)|\right\}^{(k-1)/k}, \qquad k = \beta+(\alpha+1)\gamma. \tag{6}$$

Allora Ω *è NTA in un intorno dell'origine.*

[7] ds è la misura di lunghezza euclidea su $\partial\Omega$ e ν è la normale su $\partial\Omega$

Si riconosce, usando la disuguaglianza di Gronwall, che l'ipotesi (6) è in sostanza equivalente alla seguente "stima di oscillazione". Dividiamo $x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3)$ e indichiamo con $B_2(x', r)$ la palla nel piano (x_1, x_2) rispetto alla metrica enerata dai campi X_1 e X_2. Allora (6) equivale a

$$\operatorname{osc}(X_j f; B_2(x', r)) \lesssim r(|X_1 f(x')| + |X_2 f(x')| + r)^{k-1}$$

Integrando la stima appena scritta su una curva subunitaria si ottiene come sottoprodotto la condizione seguente su f.

$$\operatorname{osc}(f; B_2(x', r)) \leq r(|X_1 f(x')| + |X_2 f(x')|) + r^{k+1}.$$

Riferimenti bibliografici

[Be] O. V. Besov, Integral representations of functions in a domain with the flexible horn condition, and imbedding theorems (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR **273** (1983), 1294–1297.

[B] B. Bojarski, Remarks on Sobolev imbedding inequalities, in Proc. of the Conference on Complex Analysis (Joensu 1987), 52–68, Lecture Notes in Math. 1351, Springer 1988.

[Bo] A. Bonfiglioli, Homogeneous Crnot Groups related to a set of vector fields, proprint.

[BKL] S. Buckley, P. Koskela, G. Lu, Boman equals John, XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium (Joensuu, 1995), 91–99, de Gruyter, Berlin, 1996.

[CG] L. Capogna, N. Garofalo, Boundary behavior of nonnegative solutions of subelliptic equations in NTA domains for Carnot-Carathéodory metrics, J. Fourier Anal. Appl. **4** (1998), 4-5, 403–432.

[CGN] L. Capogna, N. Garofalo, D. M. Nhieu, Examples of uniform and NTA domains in Carnot groups, Proceedings on Analysis and Geometry (Russian) (Novosibirsk Akademgorodok, 1999), 103–121, Izdat. Ross. Akad. Nauk Sib. Otd. Inst. Mat., Novosibirsk, 2000.

[FP] C. Fefferman, D. H. Phong, Subelliptic eigenvalue problems, in "Conference on Harmonic Analysis in honor of Antoni Zygmunf", Wadswort (1983), 590–606.

[FF1] F. Ferrari, B. Franchi, A local doubling formula for harmonic measure associated with subelliptic operators, preprint.

[FF2] F. Ferrari, B. Franchi, Geometry of the boundary and doubling property of the harmonic measure for Grushin type operators, Rend. Sem. Univ. e Politec. Torino (in corso di stampa).

[F] B. Franchi, Weighted SObolev–Poincaré inequalities and pointwise inequalities for a class of degenerate elliptic equations, Trans AMS 327 (1991), 125–158.

[FL1] B. Franchi, E. Lanconelli, Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Conference on linear partial and pseudodifferential operators (Torino, 1982). Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1983, Special Issue, 105–114.

[FL2] B. Franchi, E. Lanconelli, Hölder regularity theorem for a class of non uniformly elliptic operators with measurable coefficients, Ann Scuola. Norm. Sup. Pisa 10 (1983) 523–541.

[FL3] B. Franchi, E. Lanconelli, An embedding theorem for Sobolev spaces related to non smooth vector fields and Harnack inequality, Comm. PDE's 9 (1984), 1237–1264.

[FLW] B. Franchi, G. Lu, R. L. Wheeden, Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields, Ann. Inst. Fourier **49**, 577–604.

[GN1] N. Garofalo, D. M. Nhieu, Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 1081–1144.

[GN2] N. Garofalo, D. M. Nhieu, Lipschitz continuity, global smooth approximations and extension theorems for Sobolev functions in Carnot-Carathéodory spaces, J. Anal. Math. **74** (1998), 67–97.

[G] A. V. Greshnov, On uniform and NTA-domains on Carnot groups, (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. **42** (2001), no. 5, 1018–1035, ii.

[HK] P. Hajłasz, P. Koskela, Sobolev met Poincaré, Mem. Amer. Math. Soc. **688** (2000).

[HK2] P. Hajlsaz, P. Koskela, Isoperimetric inequa lity and imbedding theorems in irregular domains, J. London Math. Soc **58** (1998), 425–450.

[HH] W. Hansen, H. Hueber, The Dirichlet problem for sub-Laplacians on nilpotent Lie groups—geometric criteria for regularity, Math. Ann. **276** (1987), no. 4, 537–547.

[J] D. Jerison, The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition, Duke Math. J. **53** (1986), 503–523.

[JK] D. Jerison, C. E. Kenig, Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains, Adv. Math. **46** (1982), 80–147.

[Jon] P. W. Jones, Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces, Acta Math. **147** (1981), 71–88.

[KOT] P. Koskela, J. Onninen, J. T. Tyson, Quasihyperbolic boundary conditions and capacity: Poincaré domains.

[M] O. Martio, John domains, bilipshitz balls and Poincaré inequality, Rev. Roumaine Math. Pures Appl 33 (1988), 107–112.

[MM1] R. Monti, D. Morbidelli, Trace theroems for vector fields, Math. Z. (in corso di stampa).

[MM2] R. Monti, D. Morbidelli, Regular domains in homogeneous groups, preprint.

[MM3] R. Monti, D. Morbidelli, lavoro in preparazione.

[MP] V. Mazja, S. Poborchi, Sobolev functions on bad domains, World Scientific 1997.

[NS] P. Negrini, V. Scornazzani, Wiener criterion for a class of a degenerate elliptic operators, J. Diff. Equations, **66** (1987), 151–164.

[SS] W. Smith, D. Stegenga, Hölder domains and Poincaré domains, Trans. AMS, 319 (1990) 67–101.

[S] E. M. Stein, Singular integral and differentiability properties of functions, Princeton University Press, 1970.

[VG] S. K. Vodop'yanov, A. V. Greshnov, On extension of functions of bounded mean oscillation from domains in a space of homogeneous type with intrinsic metric, Siberian Math. J. **36** (1995), no. 5, 873–901.